

Marius Perianu  
Ștefan Smărândoiu  
Cătălin Stănică

# Matematică

Clasa a VI-a

**I**



## Algebră

### I. Mulțimi

|      |                                                  |    |
|------|--------------------------------------------------|----|
| I.1. | Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale             | 8  |
| I.2. | Relații între mulțimi. Submulțimi                | 13 |
|      | Teste de evaluare                                | 17 |
|      | Fișă pentru portofoliul individual (A1)          | 19 |
| I.3. | Operații cu mulțimi                              | 21 |
| I.4. | Mulțimi finite și mulțimi infinite               | 26 |
|      | Teste de evaluare                                | 29 |
|      | Fișă pentru portofoliul individual (A2)          | 31 |
|      | Test-model pentru Evaluarea Națională (Mulțimi)  | 33 |
| I.5. | Probleme cu caracter practic                     | 36 |
| I.6. | Probleme pentru performanță școlară și olimpiade | 38 |

### II. Divizibilitatea numerelor naturale

|       |                                                                               |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| II.1. | Divizibilitatea numerelor naturale (recapitulare)                             | 44 |
| II.2. | Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime          | 49 |
| II.3. | Divizori comuni. Determinarea c.m.m.d.c. a două sau mai multe numere naturale | 52 |
| II.4. | Multipli comuni. Determinarea c.m.m.m.c. a două sau mai multe numere naturale | 57 |
| II.5. | Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$                    | 61 |
|       | Teste de evaluare                                                             | 65 |
|       | Fișă pentru portofoliul individual (A3)                                       | 67 |
|       | Fișă pentru portofoliul individual (A4)                                       | 69 |
|       | Test-model pentru Evaluarea Națională (Numere naturale)                       | 71 |
| II.6. | Probleme cu caracter practic                                                  | 73 |
| II.7. | Probleme pentru performanță școlară și olimpiade                              | 75 |

### III. Rapoarte și proporții

|         |                                                                      |     |
|---------|----------------------------------------------------------------------|-----|
| III.1.  | Rapoarte                                                             | 80  |
| III.2.  | Procente                                                             | 85  |
| III.3.  | Proporții. Proprietatea fundamentală a proporțiilor                  | 92  |
| III.4.  | Proporții derivate. Șir de rapoarte egale                            | 98  |
|         | Teste de evaluare                                                    | 103 |
|         | Fișă pentru portofoliul individual (A5)                              | 105 |
|         | Test-model pentru Evaluarea Națională (Rapoarte și proporții)        | 107 |
| III.5.  | Mărimi direct proporționale                                          | 109 |
| III.6.  | Mărimi invers proporționale                                          | 113 |
| III.7.  | Regula de trei simplă                                                | 117 |
| III.8.  | Elemente de organizare a datelor. Reprezentarea datelor prin grafice | 122 |
| III.9.  | Probabilități                                                        | 127 |
|         | Teste de evaluare                                                    | 131 |
|         | Fișă pentru portofoliul individual (A6)                              | 133 |
|         | Test-model pentru Evaluarea Națională (Proportionalitate)            | 135 |
| III.10. | Probleme cu caracter practic                                         | 137 |

# Geometrie

## IV. Noțiuni geometrice fundamentale

|        |                                                                                                                                     |     |
|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| IV.1.  | Unghiul. Clasificarea unghiurilor (recapitulare)                                                                                    | 142 |
| IV.2.  | Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi                                                                                          | 148 |
| IV.3.  | Unghiuri complementare. Unghiuri suplementare                                                                                       | 152 |
| IV.4.  | Unghiuri opuse la vârf                                                                                                              | 156 |
| IV.5.  | Unghiuri în jurul unui punct                                                                                                        | 160 |
|        | Teste de evaluare                                                                                                                   | 163 |
|        | Fișă pentru portofoliul individual (G1)                                                                                             | 165 |
|        | Test-model pentru Evaluarea Națională (Unghiul)                                                                                     | 167 |
| IV.6.  | Drepte paralele. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism                                                                         | 169 |
| IV.7.  | Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă.<br>Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă                | 174 |
|        | Teste de evaluare                                                                                                                   | 180 |
|        | Fișă pentru portofoliul individual (G2)                                                                                             | 181 |
|        | Test-model pentru Evaluarea Națională (Paralelism)                                                                                  | 183 |
| IV.8.  | Cercul. Elemente în cerc. Unghi la centru. Pozițiile relative ale unei drepte<br>față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri | 185 |
|        | Teste de evaluare                                                                                                                   | 188 |
| IV.9.  | Probleme cu caracter practic                                                                                                        | 189 |
| IV.10. | Probleme pentru performanță școlară și olimpiade                                                                                    | 191 |

## V. Triunghiul

|      |                                                                  |     |
|------|------------------------------------------------------------------|-----|
| V.1. | Triunghiul. Elementele triunghiului. Clasificarea triunghiurilor | 194 |
| V.2. | Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi                         | 199 |
| V.3. | Construcția triunghiurilor                                       | 202 |
| V.4. | Congruența triunghiurilor                                        | 206 |
| V.5. | Metoda triunghiurilor congruente                                 | 210 |
| V.6. | Congruența triunghiurilor dreptunghice                           | 215 |
|      | Teste de evaluare                                                | 217 |
|      | Fișă pentru portofoliul individual (G3)                          | 219 |
|      | Test-model pentru Evaluarea Națională (Triunghiul)               | 221 |
| V.7. | Probleme cu caracter practic                                     | 223 |
| V.8. | Probleme pentru performanță școlară și olimpiade                 | 225 |

## VI. Variante de subiecte pentru teză

|            |     |
|------------|-----|
| Varianta 1 | 228 |
| Varianta 2 | 229 |
| Varianta 3 | 230 |
| Varianta 4 | 231 |
| Varianta 5 | 232 |

|         |     |
|---------|-----|
| Soluții | 233 |
|---------|-----|

# Algebră

|    |            |                                                  |
|----|------------|--------------------------------------------------|
| 8  | <b>I.1</b> | Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale             |
| 13 | <b>I.2</b> | Relații între mulțimi. Submulțimi                |
| 17 |            | Teste de evaluare                                |
| 19 |            | Fișă pentru portofoliul individual (A1)          |
| 21 | <b>I.3</b> | Operații cu mulțimi                              |
| 26 | <b>I.4</b> | Mulțimi finite și mulțimi infinite               |
| 29 |            | Teste de evaluare                                |
| 31 |            | Fișă pentru portofoliul individual (A2)          |
| 33 |            | Test-model pentru Evaluarea Națională            |
| 36 | <b>I.5</b> | Probleme cu caracter practic                     |
| 38 | <b>I.6</b> | Probleme pentru performanță școlară și olimpiade |

## I

## Mulțimi

## I.1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

O *mulțime* este o grupare de obiecte, simboluri etc., bine precizate și distincte, numite *elementele* mulțimii.

Mulțimile se notează de regulă cu litere mari:  $A, B, M, N, \dots$ , iar elementele se notează cu litere mici, simboluri, numere etc.

### Mulțimea numerelor naturale

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale se numește *mulțimea numerelor naturale*. Se notează  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

### Mulțimea numerelor naturale nenule

Mulțimea ale cărei elemente sunt toate numerele naturale mai puțin 0 se numește *mulțimea numerelor naturale nenule*. Se notează  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ .

### Relații între element și mulțime

Dacă  $M$  este o mulțime și  $x$  este un element al mulțimii  $M$ , se spune că *elementul  $x$  aparține mulțimii  $M$*  (pe scurt  *$x$  aparține lui  $M$* ) și se notează  $x \in M$ .

Dacă  $x$  nu este element al mulțimii  $M$ , se spune că  *$x$  nu aparține mulțimii  $M$*  și se notează  $x \notin M$ .

**Exemplu:** Dacă  $M = \{1, 2, 3\}$ , avem  $1 \in M$ ,  $2 \in M$  și  $3 \in M$ , dar  $0 \notin M$ ,  $5 \notin M$ .

**Mulțimea vidă.** Mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțimea vidă* și se notează  $\emptyset$  (de exemplu mulțimea elefanților de pe Lună).

### Moduri de definire a mulțimilor

**1** Enunțând o proprietate comună a elementelor acelei mulțimi.

**Exemple:**  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \cdot x + 3 \leq 18\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{ este cifră impară}\}$ .

**2** Prin enumerarea tuturor elementelor ei între acolade.

**Exemple:**  $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{0, 3, 6, 9\}$ .

**3** Prin enumerarea tuturor elementelor în interiorul unei linii curbe închise (numită diagrama Venn-Euler).

**Exemple:**



**Mulțimi finite. Mulțimi infinite.** Mulțimile cu un număr finit (limitat) de elemente se numesc *mulțimi finite*.

Mulțimile care nu au un număr finit de elemente (spunem că au un număr infinit de elemente) se numesc *mulțimi infinite*.

### Exemple:

- 1** Mulțimea cifrelor din sistemul zecimal este finită.
- 2** Mulțimea oamenilor de pe globul pământesc este finită.
- 3** Mulțimea numerelor naturale este infinită.
- 4** Mulțimea numerelor naturale divizibile cu 7 este infinită.

**Cardinalul unei mulțimi finite** este numărul elementelor mulțimii. Cardinalul mulțimii finite  $M$  este un număr natural care se notează  $\text{card } M$ .

**Observație.** Notăm cardinalul unei mulțimi infinite cu simbolul  $\aleph$ , pe care îl citim *infini*. ( $\aleph$  nu este număr natural).

### Exemple:

1 Mulțimea  $M = \{2, 5, 7, 8\}$  are 4 elemente și scriem:  $\text{card } M = 4$ .

2  $\text{card } \mathbb{N}^* = \aleph$ .

## Exersare



- 1 Scrieți, prin enumerare și sub formă de diagramă, mulțimile literelor folosite în scrierea cuvintelor: *capacitate, matematică, perspicacitate, paralelipiped*.
- 2 Se dau mulțimile:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  și  $C = \{3, 5, 7, 9\}$ . Pentru fiecare dintre elementele  $0, 1, 2, 5, 6, 7$ , scrieți cărei mulțimi aparțin și căreia nu.
- 3 Este corect scrisă mulțimea  $A = \{1 + 2, 2 + 3, 4 + 1, 7, 13\}$ ? Justificați.
- 4 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:  

|                                                    |                                            |                                                                |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| <b>a</b> $2 \in \{x \mid x \text{ divide } 16\}$ ; | <b>b</b> $7 \in \{x \mid 2 \leq x < 7\}$ ; | <b>c</b> $21 \notin \{x \mid x = \overline{21c}\}$ ;           |
| <b>d</b> $4^2 \in \{x \mid 2^3 < x < 2^5\}$ ;      | <b>e</b> $543 \in \{x \mid x : 5\}$ ;      | <b>f</b> $10^3 \notin \{x \mid x \text{ se divide cu } 10\}$ . |
- 5 Determinați valoarea numărului natural  $x$  pentru care numărul natural 2 este element al mulțimii  $A = \{2 \cdot x + 1, 2 \cdot x + 2, 2 \cdot x + 3\}$ .
- 6 Scrieți următoarele mulțimi, enumerând elementele:  

|                                                               |                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <b>a</b> $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 7\}$ ;        | <b>d</b> $D = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 11 \leq x < 23\}$ ;                    |
| <b>b</b> $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 9\}$ ; | <b>e</b> $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 18 \text{ se împarte exact la } x\}$ ; |
| <b>c</b> $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 7 < x \leq 14\}$ ;   | <b>f</b> $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ impar}, x < 13\}$ .           |

Reprezentați cele 6 mulțimi utilizând diagrame Venn-Euler.
- 7 **a** Scrieți mulțimea numerelor naturale pare mai mici decât 14.  
**b** Scrieți mulțimea numerelor naturale impare mai mici decât 11.  
**c** Scrieți mulțimea numerelor naturale pare, de două cifre, divizibile cu 5.  
**d** Scrieți mulțimea numerelor naturale, mai mici decât 123, divizibile cu 25.  
**e** Scrieți mulțimea numerelor naturale de trei cifre, cu toate cifrele egale.
- 8 Fie mulțimile  $A = \{2, 7, 11, 20\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{ este predecesor al lui } m, \text{ unde } m \in A\}$ , și  $C = \{x \mid x \text{ este succesor al lui } m, \text{ unde } m \in A\}$ . Scrieți prin enumerare, apoi utilizând diagrame Venn-Euler elementele mulțimilor  $B$  și  $C$ .
- 9 Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite sau infinite:  

|                                                              |                                                                       |
|--------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 11\}$ ;    | $B = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ și } 2 \cdot y + 1 \geq 37\}$ ; |
| $C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 2^n < 2^{10}\}$ ; | $D = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ și } 5^m + 3 > 130\}$ .         |
- 10 Scrieți mulțimea  $A$  știind că are trei elemente și folosind informațiile următoare:  
 $7 \notin A, 5 \notin A, 4 \notin A, 2 \notin A, 1 \notin A, 0 \in A, 8 \notin A, 6 \notin A$ .

11 Precizați mulțimile finite:

**a**  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 13 \leq x \leq 31\};$

**b**  $B = \{2^0; 2^2; 2^4; 2^5\};$

**c**  $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x > 212\};$

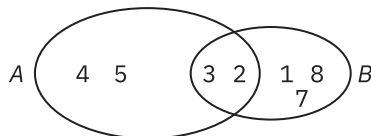
**d**  $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divide } 50\};$

**e**  $E = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \leq 100\};$

**f**  $F = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x^2 \geq 100\}.$

12 Scrieți elementele mulțimilor  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$ . Comparați cardinalul lor și reprezentați mulțimile folosind diagrame Venn-Euler.

13 Precizați elementele celor două mulțimi din reprezentarea de mai jos.



## Consolidare



14 În locul spațiilor punctate puneți unul dintre semnele  $>$  sau  $<$  sau  $=$ , pentru ca următoarele mulțimi să verifice relația scrisă în dreptul fiecăreia:

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 2x + 1 \dots\dots 39\}$

$\text{card } A = 19;$

$B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ și } 4n \dots\dots 56\}$

$\text{card } B = 1;$

$C = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ și } 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \dots\dots m^2\}$

$\text{card } C = 6.$

15 Fie mulțimea  $A = \{5, 9, 13, 17, \dots, 201\}$ . Determinați cardinalul mulțimii  $A$  și arătați că media aritmetică a elementelor din  $A$  nu aparține mulțimii  $A$ .

16 Fie mulțimea  $A = \{15, 20, 25, \dots, 85\}$ .

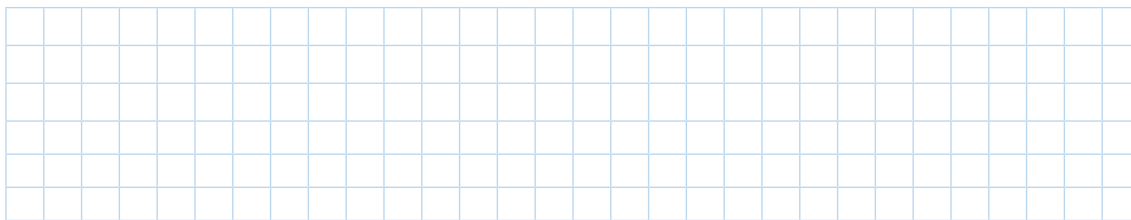
**a** Scrieți elementele mulțimii  $A$  divizibile cu 10.

**b** Scrieți elementele mulțimii  $A$  divizibile cu 2.

**c** Determinați numărul de elemente al mulțimii  $A$ .

17 Scrieți mulțimea  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 2x + 7 \leq 20\}$  prin enumerarea tuturor elementelor.

**Rezolvă problema chiar aici:**



18 Câte elemente are mulțimea  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 7x + 3 = x + 28\}$ ?

19 Determinați numărul natural  $n$  știind că  $11 \in \{3x + 5, 2n + 4\}$ .

20 **a** Determinați  $a \in \mathbb{N}$ , astfel încât cardinalul mulțimii  $\{a, 2a + 5, 3a + 1\}$  să fie 2.

**b** Determinați  $a \in \mathbb{N}$ , pentru care  $\text{card}\{a, 3a, a + 1\} = 2$ .

**c** Determinați  $a \in \mathbb{N}$ , astfel încât cardinalul mulțimii  $\{x \in \mathbb{N} \mid 2 \cdot x + a < 9\}$  să fie un element al mulțimii  $\{4, 5\}$ .

21 Aflați cardinalul mulțimii:  $A = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ se scrie numai cu cifra } 3 \text{ și } n < 401\}$ .

- ### Rezolvă problema chiar aici:

- 11



- 33** Numerele naturale impare consecutive sunt grupate astfel:  $\{1\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{7, 9, 11\}$ ,  $\{13, 15, 17, 19\}$ , ... etc. Determinați suma numerelor din a 8-a mulțime.
- 34** Fie  $A = \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$ . Aflați  $\text{card}\{x \in A \mid x : 2 \text{ sau } x : 5\}$ .
- 35** Se dă șirul de mulțimi  $A_1 = \{1\}$ ,  $A_2 = \{2, 3, 4\}$ ,  $A_3 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ , ... .  
**a** Scrieți elementele mulțimii  $A_4$ .  
**b** Determinați mulțimea ce conține numărul natural 2010.  
**c** Determinați cel mai mic și cel mai mare element al mulțimii  $A_{2010}$ .
- 36** Fie mulțimea  $A = \{2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \mid a, b, c \in \mathbb{N}\}$ . Arătați că printre oricare 9 elemente ale lui  $A$  există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

## Probleme de șapte stele



- 37** Se dă mulțimea  $A$ , formată din numere naturale, cu proprietățile:  
**a** dacă  $x \in A$ , atunci  $5 \cdot x + 1 \in A$ ;  
**b** dacă  $7 \cdot x + 4 \in A$ , atunci  $x \in A$ ;  
**c**  $9 \in A$ .  
 Arătați că numărul 6 aparține mulțimii  $A$ .
- 38** Determinați mulțimile  $A$  și  $B$  care îndeplinesc simultan următoarele proprietăți:  
**a** mulțimea  $\{1, 2, 3, 4\}$  este formată din toate elementele mulțimilor  $A$  și  $B$ ;  
**b** fiecare mulțime are câte două elemente;  
**c** dacă  $x \in A$ , atunci  $x + 1 \in B$ .
- 39** Se dă mulțimea  $A$ , formată din numere naturale, cu proprietățile:  
**a** dacă  $x \in A$ , atunci  $3x + 2 \in A$ ;  
**b** dacă  $x^2 + 1 \in A$ , atunci  $x \in A$ ;  
**c**  $1 \in A$ .  
 Arătați că numerele 4, 5 și 26 aparțin mulțimii  $A$ .
- 40** Se dă mulțimea  $A$ , formată din numere naturale, cu proprietățile:  
**a** dacă  $x \in A$ , atunci  $3 \cdot x \in A$  și  $6 \cdot x + 4 \in A$ ;  
**b** dacă  $4 \cdot x + 2 \in A$ , atunci  $x \in A$ ;  
**c**  $11 \in A$ .  
 Arătați că  $2010 \in A$ .